-Τι είναι Γεωμετρία κατά Klein

Γενικά , η άποψη του Klein για την Γεωμερία (~1870)

- Η Γεωμετρία αναπτύσσεται με την βοήθεια νεωτέρων και θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών, όπως οι δομές της ομάδας και του μετρικού χώρου. Έτσι έχομε απαλλαγή από τα δεσμά της εποπτείας , η οποία είτε στον Ευκλείδη, είτε και στον Hilbert ακόμη , παίζει σημαντικό ρόλο.
- Η Γεωμετρία, μπορεί και δίνει ενιαία διατύπωση στα κύρια ζητούμενα επί μέρους περιοχών των μαθηματικών, όπως :
    1. Τοπολογικών και ιδιαίτερα μετρικών χώρων.
    2. Ευκλείδειων διανυσματικών χώρων (με θετικά ορισμένο εσωτ. γινόμενο) και άρα χώρων Ευκλείδειων στο R^n.
- Ψευδοευκλείδιων διαν. Χώρων (δηλ. με όχι θετικά ορισμένο εσωτ. Γινόμενο) όπως ο χώρος Minkowski της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ KLEIN

Έστω σύνολο $X \neq \varnothing$ και

$B(X) \equiv \{f / f : X \to X \text{ με } f \text{"1-1" και επί}\}$.

Μπορεί να αποδειχθεί, ότι το B(X) εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων «$\circ$»είναι ομάδα.

Πράγματι:

Αν $f \in B(X)$ τότε υπάρχει η f^{-1} , η οποία κι αυτή θα είναι 1-1 και επί του X και $f \circ f^{-1} = id_x$ και $id_x(x) = x$ $\forall x \in X$ είναι «1-1» και επί του X.

Επίσης η σύνθεση είναι προσεταιριστική πράξη , η σύνθεση δύο $f, g \in X$ «1-1» και επί, η $f \circ g$ είναι επίσης «1-1» και επί και άρα $f \circ g \in X$. Ακόμα $id_x \circ f = f \circ id_x = f$ $\forall f \in X$

Στη συνέχεια θεωρούμε μια υποομάδα της B(X) , την $(G, \circ)$.

Είμαστε έτοιμοι για τον παρακάτω

Ορισμός Γεωμετρίας Klein:

Το ζεύγος (G,X) , καλείται «ΓεωμετρίαKlein» που ορίζεται στο X , από την υποομάδα $(G, \circ)$ της ομάδας $(B(X), \circ)$.

Τι διερευνά η κάθε Γεωμετρία Klein;

O Klein καθόρισε το αντικείμενο έρευνας της Γεωμετρίας του. Αυτό είναι **η μελέτη των ιδιοτήτων** των **«σχημάτων»**(:=των μη κενών υποσυνόλων) του X οι οποίες παραμένουν **αναλλοίωτες ως προς την G .**

Πότε μια ιδιότητα είναι αναλλοίωτη ως προς την G;

Μια ιδιότητα του «σχήματος» $\Sigma \subseteq X$ θα λέμε ότι παραμένει αναλλοίωτη ως προς G , αν το f(Σ) έχει την ιδιότητα αυτή για κάθε $f \in G$.

Μια αυστηρότερη περιγραφή του προηγουμένου:

Αν J είναι ένας προτασιακός τύπος(:=ιδιότητα) με σύνολο αναφοράς το δυναμοσύνολο του X (συμβολιζόμενο με $\mathscr{P}(X)$) και ως σύνολο αληθείας αυτής της ιδιότητας είναι το $T(J)=\{A\in \mathscr{P}(X) \ : \ J(A)$ «αληθές»$\}$

Θα λέμε ότι η J παραμένει αναλλοίωτη για μια $f : X \to X$ αν $f(A) \in T(J)$. Επομένως έχομε τον παρακάτω

Ορισμός: ***Μια ιδιότητα J θα παραμένει αναλλοίωτη ως προς G , αν αυτή παραμένει αναλλοίωτη για κάθε f∈G.***

Επομένως το ζητούμενο από κάθε γεωμετρία Κλάϊν είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των υποσυνόλων του X που παραμένουν αναλλοίωτες ως προς την G .

Για να γίνει αντιληπτή η ευρύτητα μιας τέτοιας άποψης, ας δούμε πώς αυτή εφαρμόζεται σ διάφορα φαινομενικά πεδία των Μαθηματικών:

ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ:

Όταν εισάγουμε μια τοπολογία σε ένα σύνολο, κατ' ουσίαν το εφοδιάζουμε με δυνατότητα ορισμού σύγκλισης ακολουθιών σε αυτό. Άρα μας ενδιαφέρουν οι απεικονίσεις που ***διατηρούν την σύγκλιση***, (Αν μια ακολουθία συγκλίνει στο u , τότε και η ακολουθία των εικόνων των όρων της ακολουθίας μέσω της f , να συγκλίνει στην εικόνα του u =: f(u))

Αυτές είναι οι συνεχείς απεικονίσεις.

Αλλά για να έχουν δομή ομάδας, θα πρέπει να αντιστρέφονται, άρα περιοριζόμεθα στο σύνολο των ομοιομορφισμών του X , δηλαδή στο σύνολο :

H(X) ={f/f :X→X με f "1-1" και «επί» και f , f^{-1} συνεχείς}

Εύκολα προκύπτει , ότι η (H(X), ∘) είναι υποομάδα της (B(X), ∘)

(Η ταυτοτική απεικόνιση είναι συνεχής και η σύνθεση συνεχών είναι συνεχής)

Άρα το (H(X), X) είναι μια γεωμετρία Κλάϊν.

Όταν μελετάμε αυτήν, κατ' ουσίαν μελετάμε τον τοπολογικό χώρο X.

Παράδειγμα ιδιότητας που παραμένει αναλλοίωτη ως προς την H(X) είναι η συμπάγια

(Η εικόνα συμπαγούς συνόλου μέσω συνεχούς «1-1» και «επί» είναι συμπαγές σύνολο.)

ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Μια μετρική d σε ένα σύνολο $X \neq \varnothing$, ουσιαστικά είναι ο εφοδιασμός του με την έννοια της απόστασης μεταξύ των σημείων του. Επίσης , επάγεται σε αυτό μια τοπολογία με περιοχές τις σφαίρες ως προς την μετρική d .

Από τις απεικονίσεις f : X→X μας ενδιαφέρουν αυτές που διατηρούν την απόσταση, δηλαδή οι **ισομετρίες.**

(Μια απεικόνιση f : X→X θα λέγεται ισομετρία , αν (d(f(x), f(y))=d(x,y) $\forall x, y \in X$ *)*

Οι παραπάνω απεικονίσεις είναι «1-1» (απλή η απόδειξη με χρήση του ορισμού της ισομετρίας: Αν f(x)=f(y) τότε $0=d(f(x), f(y))=d(x,y) \rightarrow x=y$)

Για να έχουν οι παραπάνω απεικονίσεις δομή ομάδας ,περιοριζόμαστε στο σύνολο :

$I_d(X) = \{f / f : X \rightarrow X$ με f ισομετρία & «επί» $\}$

Το παραπάνω σύνολο εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων είναι υποομάδα της B(X) (με πράξη την σύνθεση)

Άρα το ζεύγος ($I_d(X)$, X) είναι μια Γεωμετρία Κλάϊν , και όταν μελετάμε την Γεωμετρία αυτή, κατ' ουσίαν μελετάμε τον μετρικό χώρο (X , d)

Παράδειγμα ιδιότητας που παραμένει αναλλοίωτη ως προς την ομάδα $I_d(X)$ αποτελεί το φραγμένον ενός υποσυνόλου του X.

(Αν A φραγμένο, τότε υπάρχει ε>0 : d(x,y)<ε για κάθε x,y ∈X. Αφού d(f(x), f(y))=d(x,y) → d(f(x), f(y))<ε . Συνεπώς η εικόνα φραγμένου μέσω ισομετρίας είναι φραγμένο)

-Η Γεωμετρία Klein του Ευκλείδειου επιπέδου.

Εισαγωγικά :

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία όπως γνωρίζουμε, μελετά τις ιδιότητες των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες ως προς το «είδος» των σχημάτων.Για παράδειγμα:

- Όλα τα τρίγωνα έχουν άθροισμα γωνιών 180 μοίρες .
- Οι διαγώνιοι όλων των παραλληλογράμμων διχοτομούνται.

- Σε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Κ.ο.κ.

Αυτές οι ιδιότητες , που αφορούν ένα είδος σχήματος, νομιμοποιούνται αν αποδειχθεί η ισχύς τους για κάθε αντιπροσωπό τους .

Είναι αυτό που κάνομε λέγοντας λ.χ. «έστω ορθογώνιο τρίγωνο» το οποίο σχεδιάζομε στον πίνακα και για το οποίο αν αποδείξομε την ισχύ μιας ιδιότητάς του, τότε αυτή δεν θα ισχύει μόνο γι' αυτό, αλλά για όλη την κλάση των ορθογωνίων τριγώνων που αντιπροσωπεύει.

Σχεδόν πάντα η απόδειξη ιδιοτήτων στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ανάγεται στην απόδειξη ή διαπίστωση ότι κάποια άλλα σχήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Έτσι έχομε το γνωστό:

Ίσα είναι δύο σχήματα, αν με κατάλληλη επίθεση μπορέσουν να ταυτιστούν.

Εννοείται πάντα αξιωματικά, ότι:

Τα ίσα σχήματα , διατηρούν τις ιδιότητές τους κατά την μετακίνησή τους στο επίπεδο . Δηλαδή, οι ιδιότητες αυτών των σχημάτων παραμένουν αναλλοίωτες κατά την μετακίνηση στο επίπεδο.

Όλα τα παραπάνω διαισθητικά , κατοχυρώνονται με την αλγεβροποίησή της , μέσω της άποψης του Κλάϊν .

Με άλλα λόγια, αν με d_E συμβολίσω την γνωστή Ευκλείδεια μετρική που προκύπτει από την γνωστή Ευκλείδεια απόσταση του κλασικού Πυθαγορείου θεωρήματος, τότε, Με το σύμβολο

$\mathrm{I}_{d_{\mathrm{E}}}$ θα συμβολίζομε το σύνολο των ισομετριών πάνω στο Ευκλείδειο επίπεδο Αν μάλιστα θεωρήσω και τον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^2, d_E)$, Τότε η γεωμετρία Κλάϊν του Ευκλείδειου επιπέδου είναι το ζεύγος:

$$\mathrm{I}_{d_{\mathrm{E}}}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$$

Περισσότερο εποπτικά έχω τις παρακάτω αντιστοιχίσεις ανάμεσα στην κλασική και την νεωτεριστική άποψη του Κλάϊν:

Ευκλείδειο Επίπεδο ⟷ Χώρος $\mathbb{R}^2$

Ευκλείδειο σχήμα Σ ⟷ $\varnothing \neq \Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$

Μετακίνηση σχήματος Σ ⟷ εφαρμογή μιας ισομετρίας στο Σ

Επίθεση σχημάτων Σ_1, Σ_2 ⟷ Εύρεση μιας ισομετρίας f : $f(\Sigma_1)=\Sigma_2$

Άρα το χαρακτηριστικό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι το αναλλοίωτον μέσω των ευκλείδειων ισομετριών.

Προείπαμε , ότι δύο σχήματα Σ_1και Σ_2 είναι ίσα κατά Κλάϊν, αν υπάρχει ισομετρία g η οποία να απεικονίζει το Σ_1 στο Σ_2

Δηλ. αν υπάρχει g : $g(\Sigma_1)= \Sigma_2$

Συμβολικά την ισότητα δύο σχημάτων μπορούμε να την παραστήσουμε με το σύμβολο «~» και να γράφουμε $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ Εννοώντας ότι τα δύο σχήματα είναι ίσα σύμφωνα με την Ευκλείδεια αντίληψη.

ΠΡΟΤΑΣΗ: ***Η σχέση «~» είναι σχέση ισοδυναμίας***

Αποδειξη:

- ✓ Είναι αυτοπαθής:

$1_\chi(\Sigma)=\Sigma$ για κάθε Σ υποσύνολο του X ,

όπου η 1_χ : X → X η ταυτοτική απεικόνιση του X.

και $1_\chi \in G$ αφού η G είναι υποομάδα της ομάδας των ισομετριών στο X. Δηλ. συμβολικά: IS(X) .

- ✓ Είναι συμμετρική

Έστω $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$. Τότε $\exists g : g(\Sigma_1) = \Sigma_2$. Αλλά αφού η g είναι ισομετρία είναι και 1-1 , είναι και «επί» , άρα

$$\exists\ g^{-1}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ g^{-1}g(\Sigma_1) = g^{-1}(\Sigma_2) \Rightarrow$$

$$1_\chi(\Sigma_1) = g^{-1}(\Sigma_2) \Rightarrow$$

$$\Sigma_1 = g^{-1}(\Sigma_2) \Rightarrow$$

$$\Sigma_2 \sim \Sigma_1$$

Με το δεδομένο ότι η $g^{-1} \in G$, αφού η G είναι υποομάδα της ομάδας των ισομετριών στο X (IS(X))

- ✓ Τέλος η σχέση «~» είναι και μεταβατική , αφού

$$αν \ \Sigma_1 \sim \Sigma_2 \quad και \ \Sigma_2 \sim \Sigma_3 \quad τοτε$$
$$\exists \ g_1, g_2 \in G : g_1(\Sigma_1) = \Sigma_2 και$$
$$g_2(\Sigma_2) = \Sigma_3. \ \ Τοτε, g_2 \circ g_1(\Sigma_1) =$$
$$g_2 \circ (g_1(\Sigma_1)) = g_2(\Sigma_2) = \Sigma_3 \Rightarrow$$
$$\Sigma_1 \sim \Sigma_3$$

Αφού $g_2 \circ g_1 \in G$ δεδομένου ότι οι g_1 και g_2 ανήκουν στην G που είναι υποομάδα και άρα θα ανήκει και η σύνθεσή τους .

Επομένως από το προηγούμενο, φαίνεται ότι η επιλογή του Κλάϊν να εχει η δομή G δομή υποομάδας, δεν είναι τυχαία.

<u>Επομένως τι το ενδιαφέρον έχω μέχρι στιγμής;</u>

- ✓ Απαλλάσσεται η Γεωμετρία από την εποπτεία, αλλά πρέπει να μπορεί κάθε φορά να βρίσκεται η g με την οποία θα μας επιτρέπεται να αποφαινόμεθα αν δύο σχήματα είναι ίσα ή όχι.
- ✓ Δημιουργείται πρόσφορο έδαφος για την μελέτη της Γεωμετρίας R^n με n >3 όπου παύει η εποπτεία.
- ✓ Επειδή ο R^n είναι διανυσματικός χώρος διάστασης n δημιουργείται η ιδέα θεώρησης και άλλων Γεωμετριών.

πάνω σε οποιονδήποτε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης ο οποίος μπορεί να ταυτιστεί μέσω ισομορφισμού με το R^n .

Ποιες όμως είναι αυτές οι ισομετρίες του επιπέδου;

Πριν φθάσουμε σε ένα σπουδαίο θεώρημα, παράστασης των ισομετριών, θα δώσουμε κάποιες βοηθητικές προτάσεις

ΠρότασηI:

Μια απεικόνιση f: V→V που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, [,] στον V , (δηλαδή [χ, ψ]=[f(x),f(ψ)] για κάθε χ, ψ στον V) είναι γραμμική

Απόδειξη:

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύουν οι ισότητες:

F(x+ψ)=f(χ)+f(ψ) και f(λχ)=λf(χ)

Για την απόδειξη της δεύτερης, πρέπει και αρκεί να δείξω ότι : [f(λχ) – λ f(x) , f(λχ)- λf(χ)]=0 . (1)

Αυτό, διότι λόγω του ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικά ορισμένο η (1) ⇔ f(λχ)- λf(χ)=0 ⇔ f(λχ)= λf(χ).

Πράγματι , έχω:

[f(λχ) – λ f(x) , f(λχ)- λf(χ)]=

[f(λχ) , f(λχ)- λf(χ)]-[λ f(x) , f(λχ)- λf(χ)]=

[f(λχ) , f(λχ)]-[f(λχ) , λf(χ)]-[λ f(x) , f(λχ)]+[λ f(x) , λf(χ)]=

[f(λχ) , f(λχ)]-λ[f(λχ) , f(χ)]-λ[f(x) , f(λχ)]+λ^2[f(x) , f(χ)] =

[λχ ,λχ]-λ[f(λχ) , f(χ)]-λ[f(λχ) , f(x)]+λ^2[f(x) , f(χ)] =

$\lambda^2[\chi , \chi]-2\lambda[\lambda\chi , \chi]+\lambda^2[x , \chi]$ = (Διατήρηση εσωτ. Γινομένου)

$2\lambda^2[\chi , \chi]-2\lambda[\lambda\chi , \chi] =$

$2\lambda^2[\chi , \chi]-2\lambda^2[\chi , \chi] = 0$

Επίσης , με ανάλογο τρόπο θα αποδείξω ότι

$[f(\chi+\psi) -f(x)-f(\psi) , f(\chi+\psi) -f(x)-f(\psi)]=0$ (2)

πράγματι, αν αποδειχθεί η (2) τότε, από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου, θα έχω ότι η (2)

$\Leftrightarrow f(\chi+\psi) -f(x)-f(\psi) =0$

$\Leftrightarrow f(\chi+\psi) =f(x)+f(\psi)$

Πράγματι, έχω:

$[f(\chi+\psi) -f(x)-f(\psi) , f(\chi+\psi) -f(x)-f(\psi)]=$

$[f(\chi+\psi), f(\chi+\psi) -f(x)-f(\psi)]+[-f(x)-f(\psi), f(\chi+\psi) -f(x)-f(\psi)]=$

$[f(\chi+\psi), f(\chi+\psi)]+[f(\chi+\psi) , -f(x)-f(\psi)] +[-f(x)-f(\psi) -f(x)-f(\psi)] +[-f(x)-f(\psi), f(\chi+\psi)]=$

$[\chi+\psi,\chi+\psi]-[\chi+\psi,\chi]-[\chi+\psi,\psi]+(-1)^2[+f(x)+f(\psi) ,+f(x)+f(\psi)]=$

$[\chi+\psi,\chi+\psi]-[\chi+\psi,\chi]-[\chi+\psi,\psi]+ [+f(x) ,+f(x)+f(\psi)] +[f(\psi) ,+f(x)+f(\psi)]=$

$[\chi+\psi,\chi+\psi]-[\chi+\psi,\chi]-[\chi+\psi,\psi]+ [f(x) ,f(x)][f(x),f(\psi)] +[f(\psi) ,+f(x)]+[f(\psi) ,f(\psi)]=$

$[\chi+\psi,\chi+\psi]-[\chi+\psi,\chi]-[\chi+\psi,\psi]+ [x ,x]+[x,\psi] +[\psi,x]+[\psi ,\psi]=$

$[\chi+\psi,\chi+\psi]-[\chi+\psi,\chi]-[\chi+\psi,\psi]+ [x ,x]+[x,\psi] +[\psi,x]+[\psi ,\psi]=$

$[\chi,\chi]+[\chi,\psi]+[\psi,\chi]+[\psi,\psi]-[\chi,\chi]-[\psi,\chi]-[\chi,\psi]-[\psi,\psi]-[\psi,\psi]-[\chi,\chi]+$
$[x,x]+[x,\psi]+[\psi,x]+[\psi,\psi]=0$

Άρα κάθε απεικόνιση που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμική.---

<u>Πρόταση ΙΙ</u>

Αν ο X είναι ένας γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο [,] και f είναι μια γραμμική απεικόνιση f:X→X , τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(ι) Η f είναι γραμμική και ισομετρία

(ιι) Η f είναι ισομετρία και ισχύει f(0)=0

<u>Απόδειξη:</u>

$\xrightarrow[(\iota)-->(\iota\iota)]{}$

Αν είναι γραμμική &ισομετρία τότε είναι φυσικά ισομετρία και λόγω γραμμικότητας ισχύει:

$f(0+0)=f(0)+f(0) \Rightarrow$

$f(0)=f(0)+f(0) \Rightarrow$

$f(0)=0$

$\xrightarrow[(\iota\iota)-->(\iota)]{}$

Αφού η f είναι ισομετρία , πρέπει να δείξω ότι είναι και γραμμική απεικόνιση.

Αν δείξω ότι η ισομετρία διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, τότε θα είναι γραμμική , σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση!

Επομένως, πρέπει κι αρκεί να δείξουμε, ότι η f ως ισομετρία διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο.

Πράγματι:

Εξ ορισμού ισομετρία σημαίνει ότι

$$\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\| \quad \forall\, x, y \in X \quad (1)$$

Για χ=0 η (1) σημαίνει ότι :

$$\|f(x)-f(0)\| = \|x-0\| \quad \forall\, x, 0 \in X \Rightarrow \text{(υπόθεση f(0)=0)}$$

$$\|f(x)-0\| = \|x-0\| \quad \forall\, x, 0 \in X \Rightarrow$$

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall\, x, \in X$$ Δηλαδή η f διατηρεί την νόρμα.

Όμως για κάθε χ, y $\in X$ έχω:

$$[f(x)-f(y),f(x)-f(y)]=\|f(x)-f(y)\|^2=$$

$$\|x-y\|^2=$$

$$[x-y,x-y]=$$

$$[x,x]-2[x,y]+[y,y]=$$

$$\|x\|^2-2[x,y]+\|y\|^2=(\eta\ f\ \iota\alpha\tau\eta\rho\epsilon\iota\,\tau\eta\nu\,\nu o\rho\mu\alpha)$$

$$\|f(x)\|^2-2[x,y]+\|f(y)\|^2$$

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\eta\,\tau\epsilon\lambda\iota\kappa\alpha\ \epsilon\chi\omega:$$

$$[f(x)-f(y),f(x)-f(y)]=\|f(x)\|^2-2[x,y]+\|f(y)\|^2$$

(*)

Αλλά ισχύει ακόμα:

$$[f(x)-f(y),f(x)-f(y)]=[f(x),f(x)]-2[f(x),f(y)]+[f(y),f(y)]=$$

$$\|f(x)\|^2-2[f(x),f(y)]+\|f(x)\|^2\ (**)$$

Από (*) και (**) έχω:

Τα πρώτα μέλη ίσα άρα και τα δεύτερα και με διαγραφή των ίσων παίρνω

[f(x),f(y)]=[x,y] δηλαδή η f διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή είναι γραμμική.---

<u>Ορισμός Ι :</u> ***Μεταφορά*** *κατά διάνυσμα*

$a \in V\ \varepsilon\iota\nu\alpha\ "1-1"\ \kappa\alpha\iota\ \varepsilon\pi\iota\ \alpha\pi\varepsilon\iota\kappa o\nu\iota\sigma\eta\ f_a : V --> V$

$,\pi o\upsilon\ o\rho\iota\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \iota\sigma o\tau\eta\tau\alpha$

$f_a(x) = x + a \qquad \Pi\rho o\kappa\varepsilon\iota\tau\alpha\iota\ \gamma\iota\alpha\ \iota\sigma o\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha :$

$d(f_a(x), f_a(y)) = \left\| f_a(x) - f_a(y) \right\| = \left\| (x+a) - (y+a) \right\| =$

$\left\| x - y \right\| = d(x, y)$

<u>Ορισμός ΙΙ:</u> ***Ορθογώνια απεικόνιση*** *λέγεται κάθε απεικόνιση f:V→V , που είναι γραμμική και ισομετρία (και συνεπώς «1-1» και «επί»)*

<u>Θεώρημα παράστασης των Ισομετριών</u>

Έστω (V, E) ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Σε κάθε ισομετρία του f: V→V αντιστοιχεί μονοσήμαντα : Μία ορθογώνια απεικόνιση g: V→V και μια μεταφορά f_α :V→V έτσι ώστε να ισχύει : $f=f_\alpha \circ g$.

<u>Απόδειξη:</u>

Θεωρώ την απεικόνιση g(x) =f(x)-f(0) . Αυτή είναι ορθογώνια. Πράγματι για την g ισχύει :

Για x=0 , g(0)=f(0)-f(0) , άρα g(0)=0 .

Επίσης:

$$\|g(x)-g(y)\| = \|(f(x)+f(0))-(f(y)+f(0))\| =$$
$$\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$$

Δηλαδή η g είναι ισομετρία. Σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα , η g θα είναι και γραμμική απεικόνιση.Δηλαδή τελικώς ορθογώνια απεικόνιση.

Επίσης θεωρώ την μεταφορά f_α *: για* $\alpha = f(0)$.

Για την ορθογώνια απεικόνιση g και για την μεταφορά f_α, ισχύει:

$(f_\alpha \circ g)(x) = f_\alpha(g(x)) = g(x)+f(0) = f(x) \quad \forall x \in V$

Απόδειξη του μονοσημάντου του ορισμού των g και f_α

Θα κάνουμε την απόδειξη με την απαγωγή σε άτοπο:

Έστω ότι υπάρχουν και δύο άλλες διαφορετικές απεικονίσεις, μια ορθογώνια g_1 και μια μεταφορά f_b για τις οποιες να ισχύει:

$g_1 \circ f_b = f$

Τότε:$f(x)=f(x) \quad \Leftrightarrow$

$(g_1 \circ f_b)(\chi) = (f_\alpha \circ g)(x) \Leftrightarrow$

$g_1(\chi)+b = g(x)+a \qquad (1)$

Αλλά αφού οι g και g_1 είναι γραμμικές απεικονίσεις,

τότε $g_1(0)=0= g(0)$και η (1) δίνει:

$0+\alpha=0+b\Rightarrow a=b$.

Επομένως και $g_1(\chi)= g(x)$ για κάθε χ στον V.

Και το θεώρημα έχει αποδειχθεί.

Από την γραμμική άλγεβρα , γνωρίζουμε ότι για κάθε γραμμική απεικόνιση , υπάρχει μια ένας nxn πίνακας που καθορίζεται από την g και δίνει τις εικόνες της μέσω μιας βάσης του V. Αν dimV=n τότε:

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & a_{11}x_1 & \dots & a_{1n}x_n \\ x_1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{m1} & \cdots & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

<u>Πρόταση ΙΙΙ</u>: *Μια γραμμική απεικόνιση f: V→V είναι ισομετρία, αν και μόνο αν* $\|x\| = \|f(x)\| \qquad \forall x \in V$

Απόδειξη: $\longrightarrow$

Αν η f ισομετρία, τότε *:*

$$\|x-0\| = \|f(x)-f(0)\| \qquad \forall x \in V$$

Αλλά όμως επειδή η f είναι και γραμμική , τότε f(0)=0

Οπότε

$$\|x-0\| = \|f(x)-0\| \qquad \forall x \in V$$

και τελικά $\|x\| = \|f(x)\| \qquad \forall x \in V$

Αντιστρόφως: ⟵ Ισχύει:

$\|x\| = \|f(x)\| \qquad \forall x \in V$ *, άρα και για x-y*

Άρα:

$$\|f(x-y)\| = \|x-y\| \qquad \Rightarrow (f\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\eta)$$
$$\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\| \Rightarrow (f\ \ \iota\sigma o\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha)$$

Εύρεση των Ευκλείδειων ισομετριών

Μια ορθογώνια απεικόνιση g : $R^2 \to R^2$ είναι μια γραμμική απεικόνιση και ορίζεται από έναν πίνακα (2χ2) ως εξής:

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+\beta y \\ \gamma\chi+\delta \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$g(x,y) = (ax+\beta y, \gamma\chi+\delta y)$$

Επομένως για να έχω ισομετρία, πρέπει κι αρκεί να ισχύει:

$\|(x, y)\| = \|ax + \beta y \ , \gamma\chi + \delta y\| \Rightarrow$ (Με την ευκλείδεια νόρμα)

$$x^2 + y^2 = (ax + \beta y)^2 + (\gamma\chi + \delta y)^2 \quad \forall x, y \in R$$

Από τα εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα συνάγω ότι οι συντελεστές των χ, y θα πρέπει να είναι μηδέν, δηλαδή:

$(\alpha^2 + \gamma^2 - 1 = 0 \ , \beta^2 + \delta^2 - 1 = 0 \ , \alpha\beta + \gamma\delta = 0) \Rightarrow$

$(\beta = \mp\gamma \quad , \delta = \pm\alpha \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \gamma^2 = 1)$ (2)

Από την (2) παίρνω τους πίνακες των ορθογωνίων απεικονίσεων για τον R^2 που είναι :

$$\begin{pmatrix} a & -\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \quad , \text{οπου} \ \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Από τα προηγούμενα έχω ότι μια ισομετρία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας , παριστάνεται από την σύνθεση μιας ορθογώνιας απεικόνισης και μιας μεταφοράς κατά διάνυσμα α=(b,c)
Επομένως οι εικόνες μιας τέτοιας ισομετρίας

f: $R^2 \to R^2$ θα δίνονται από τους επόμενους δύο τύπους:

$$\left(\begin{array}{l} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-\gamma y+b \\ \gamma\chi+\alpha y+c \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-\gamma y+b \\ \gamma\chi+\alpha y+c \end{pmatrix} \\ a^2+\gamma^2=1 \\ \end{array} \right)$$

Θέτοντας α=συνθ και γ=ημθ και για b=c=0 . ο πρώτος τύπος δίνει:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ y \end{pmatrix}$$

που αντιστοιχεί σε στροφή κατά γωνία θ .

Στον πρώτο τύπο για α=1 , γ=0 , έχω μεταφορά

f(x,y)=(x,y)+(b,c)

Στον δεύτερο τύπο για α=1 , γ=0 και b=c=0 έχω τον κατοπτρισμό f(x,y)=(x,-y).

Μπορεί εύκολα τώρα να αποδειχθεί, ότι αν έχω δύο ισομετρίες που απεικονίζουν τρία μη συνευθειακά σημεία στις ίδιες εικόνες, τότε αυτές οι ισομετρίες ταυτίζονται.

Δηλαδή, αν $f(x_\iota,y_i)=g(x_\iota,y_i)$ για i=1,2,3 , τότε f=g.

Η απόδειξη πραγματοποιείται με το ότι τα α, γ, b, c προσδιορίζονται μονοσήμαντα από τις αντίστοιχες εξισώσεις που ικανοποιούν τα τρία σημεία.

Σύμφωνα με το προηγούμενο, δοθησών δύο ίσων τριγώνων , υπάρχει ακριβώς μία συμμετρία που απεικονίζει το ένα επί του άλλου.

Έτσι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα κατά Κλάϊν και έχω την υλοποίηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σύμφωνα με την άποψη του μεγάλου αυτού μαθηματικού.-